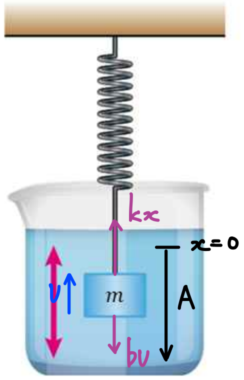
5. 감쇠진동(Damped Oscillations)

가. 감쇠진동의 운동방정식 : 저항력이 $\vec{R}=-b\vec{v}$인 유체를 가정함



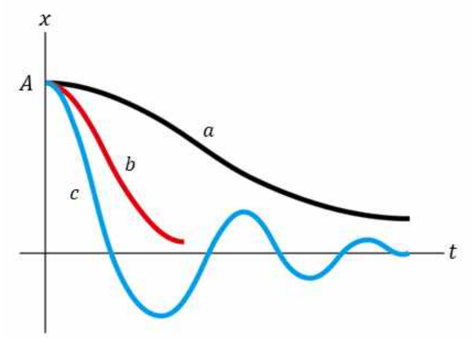
$$\Sigma F = ma \ : \ -kx - b\underset{\frac{dx}{dt}}{v} = m\underset{\frac{d^2x}{dt^2}}{a}$$

$$\rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \left(\leftarrow \frac{d}{dt} = D\right)$$

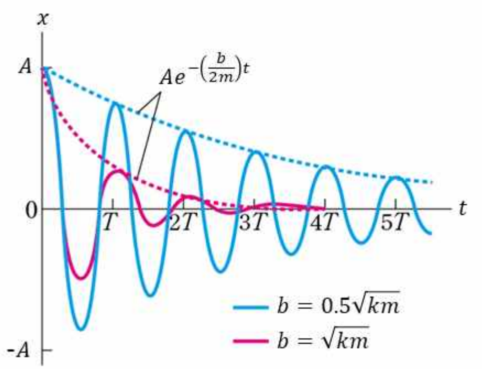
$$\therefore \ (mD^2 + bD + k)x = 0$$

$$b^2 - 4km \begin{cases} > 0 & : \text{과감쇠} \\ = 0 & : \text{임계감쇠} \\ < 0 & : \text{미급감쇠 (진동)} \end{cases}$$

나. 저항계수 b에 따른 운동의 구분 : 저항계수가 클수록 진폭이 서서히 감소



과감쇠(a), 임계감쇠(b), 미급감쇠(c)



저항계수 크기에 따른 미급감쇠

1) **과감쇠(overdamping)** : $b^2 - 4km > 0$ 일 때

$$x = Ce^{a_1 t} + De^{a_2 t} \left(\text{단, } a_1 = -\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}},\ a_2 = -\frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)$$

2) **임계감쇠(critical damping)** : $b^2 - 4km = 0$ 일 때

$$x = (A + Bt)e^{-bt/2m}$$

3) **미급감쇠(underdamping)** : $b^2 - 4km < 0$, 저항이 작을수록 단진동에 가까워짐

$$x = Ae^{-bt/2m}\cos(\omega t + \phi),\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \ \xrightarrow{b=0} \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ : \text{단진동}$$

$$(mD^2 + bD + k)x = 0 \ \rightarrow \ \left(D^2 + \frac{b}{m}D + \frac{b^2}{4m^2} - \frac{b^2}{4m^2} + \frac{k}{m}\right)x = 0$$

$$\rightarrow \left(\left(D + \underset{\alpha\ \text{정의}}{\frac{b}{2m}}\right)^2 + \underset{\beta^2\ \text{정의}}{\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)}\right)x = 0 \ \rightarrow \ (D + (\alpha + i\beta))(D + (\alpha - i\beta))x = 0$$

$$\rightarrow \ x = Ce^{-(\alpha+i\beta)t} + De^{-(\alpha-i\beta)t} \ \text{ or } \ Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t + \phi)$$

다. 감쇠진동의 에너지 변화 : 총에너지가 유체의 저항에 의해 손실

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = m v \overset{a}{\frac{dv}{dt}} + kx \overset{v}{\frac{dx}{dt}} = v\underset{-bv}{(ma + kx)} = -bv^2$$

$$\therefore \ \frac{dE}{dt} = -bv^2$$

※ $(\overset{\frac{d}{dt}}{D} - a)x = 0$

$\frac{dx}{dt} = ax \rightarrow \int\frac{1}{x}dx = \int a\,dt$

$\ln\frac{x}{x_0} = at \rightarrow x = x_0e^{at}$

※ $\left(D^2 + \frac{b}{m}D + \frac{k}{m}\right)x = 0$

$(D - a_1)(D - a_2)x = 0$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \\ a_2 = -\frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \end{cases}$$

※ $b^2 = 4km$ 일때

$(D - a)\underset{u\ \text{정의}}{(D - a)x} = 0$

$(\overset{\frac{d}{dt}}{D} - a)u = 0$

$\therefore u = Be^{-at}$

$\rightarrow \frac{dx}{dt} - ax = Be^{-at}$ ($e^{at}\times$, $\times e^{at}$)

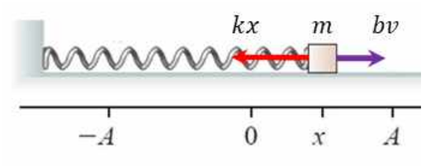
$\rightarrow \frac{dx}{dt}e^{at} + xe^{at} = B$

$\rightarrow \frac{d}{dt}(xe^{at}) = B$

$\rightarrow xe^{at} - \overset{A}{x_0} = Bt$

$\therefore x = (A + Bt)e^{-at}$

예제) 수평면에 놓인 질량 $m=100\mathrm{g}$인 물체가 용수철에 연결되어 있다. 물체를 평형위치에서 $A=5\mathrm{cm}$만큼 잡아 당겼다가 놓으면 물체가 운동을 시작하는데, 운동 중 받는 마찰력이 물체의 속력 v의 함수로 $-20v$(속력의 반대방향)이다. 물체가 (감쇠) 진동이 가능할 최소한의 용수철 탄성계수는?(참고 : 탄성계수가 너무 작으면 복원력의 효과가 저항력보다 작아서 평형위치에 도달하기 전에 물체의 속력이 0이 될 것임)



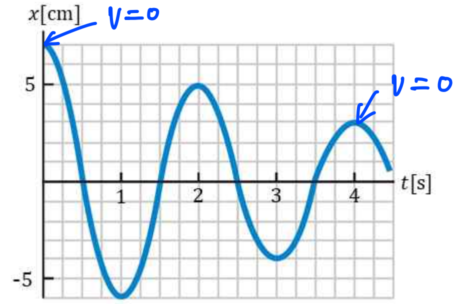
$\Sigma F = ma$ $(\leftarrow \Sigma F = -kx - bv)$

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$

$b^2 - 4km = 0$: 임계감쇠

$\therefore k = \dfrac{b^2}{4m} = 1000\ [\mathrm{N/m}]$

예제) 탄성계수가 $200\mathrm{N/m}$인 용수철에 매달린 물체가 유체 속에 잠겨 있다. 그림은 물체를 진동중심(힘 평형점) $x=0$에서 아래로 $x=7\mathrm{cm}$만큼 잡아당겼다가 놓았을 때, 시간 t에 따른 물체 위치 x의 감쇠진동 그래프이다. $0\sim4\mathrm{s}$동안의 물체의 총에너지 변화량은?



$\Delta E = \frac{1}{2}kx'^2 - \frac{1}{2}kx^2$ $(\because v=0,\ K=0)$

$= \frac{1}{2}(200)(0.03^2 - 0.07^2) = -0.4\mathrm{J}$